˜段往

——追Á李忠老

周

2021.12.21

八二c秋天，北Œ 学 招 ˜百五 多个新 ，我 其中之˜。我们c级分 o个小班。Œ‘全c级˜起上， 题‘小班分m上。˜c级上学期 学期，李忠老 给我们c级讲 《 学分析》的Œ‘，张心明老 ú任˜班 二班的助 ，同 兼任˜班的班主任。田小 老 ú任三班 o班的助 ，同 兼任三班的班主任。吴宝‰老 ú任c级主任。后来 为李老 弟子的方丽萍同学在二班，w 珍同学在o班，而我在三班。 当c，李老 刚l瑞 Zurich Œ学访学回 ， 里屈指Œ 的改革m放后 访 的老 。¦在 外学到 许多 的 学g ， 备 当的 际 •。¦@ 只有o 8•，风华正茂，才华 Ä，¿气风发，魅力 足。我们c级 幸运地由¦这 的老 来执 。八五c S季学期，¦又 我们c级的《复变 》。跟‘李老 学 三个学期，我学到 许多分析的硬功夫。我后来l 偏微分方 的研 Ï为我对我的分析功底 有信心，而我的分析基:得Ã于李老 的谆谆 诲。八 c" c" 学 还在˜院，每个 研 在 里只有˜个办公 。李老 于 Ø 研 。¦每周给我们上两gŒ‘，每gŒ‘两个小 。张老 田老 在李老 的指导 每周给我们上˜g 题‘，每g两小 。,外，李老 每周还在 研 安ü两小 的‰¦。@个c"老 们 学极为认真，同学们学 •极为勤奋。李老 讲‘重点突 ， 入浅 ，听¦讲‘ ˜种 。¦平´人， 蔼Œ亲， 同学们的爱•。l八二c到 在® 三 c，但有件 我印 ，至 回 起来仍历历在8。

记得 秋的,个 午，我去找 研 找李老 ‰¦。李老 刚给我们讲完这 的˜个定理：闭区间上的连续 ˜致连续。当 我们才 > ˜点点 理Ø 极 理Ø，这个定理的证明 得非 奥 复杂。我找 ˜个简ü $\sqrt{1-x^2}$(ü位圆的˜部分)， 根 定Â直 证明$\sqrt{1-x^2}$在$[0;1]$上˜致连续，即证明

对于任¿$" > 0$，•在 = (") > 0 得当$x_1; x_2 \in [0;1]$且$|x_1 - x_2| \le$ ，

$$\left|\sqrt{1-x_1^2} - \sqrt{1-x_2^2}\right| < ": \tag{1}$$

当 我的 法 证明

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\right| &= \left|\frac{x_2^2-x_1^2}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}}\right| \\ &\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}} \\ &< '':\end{aligned}$$

但 我遇到 Œ æ烦。• 然$|x_2-x_1|$Œ ± 选取 小，但当$x_1; x_2$ 1 $\sqrt{1-x_1^2}$ $\sqrt{1-x_2^2}$ • Œ ± 小。于 后面的不等 没法 › 制。我百 g 不得其 ，只 去找李老 ‰ ¦ 。

见 李老 ，¦ 让我讲 ˜ 讲我的 g ´ 困惑. 听完后，¦ 轻描淡写地 ` ：“ \ 不 ù $x_1; x_2$ 1 í ？ @ 么 \ 假 $x_1; x_2$在1附 ，这 $\sqrt{1-x_1^2}$, $\sqrt{1-x_2^2}$都 0, § 们的 当然 Œ ± 任 ¿ 小。如 x_1离1 有 ˜ 个正的 离，\ 写的不等 的分 1 有正的 ，这 不等 Œ › 制 。” 当 我茅塞顿 m，恍然 Œ 悟。原来证明 Œ ± 如 d 直 当，如 d 简明扼 ‡ 。用 学语言来讲，李老 的证明如 ：

不妨 $x_1 < x_2$. 由$\sqrt{1-x^2}$的连续性，• 在 $_0 \in (0; 1)$, 得当$x \in [1- \ _0; 1]$ ，

$$\sqrt{1-x^2} < '':$$

分两种情形讨 Ø 。

(1) $x_1 \in [1- \ _0; 1]$.

d 然

$$\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2} \le \sqrt{1-x_1^2} < '':$$

(2) $x_1 \in [0; 1- \ _0]$.

这

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\right| &\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}} \\ &\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{1-(1- \ _0)^2}} \\ &\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{\ _0}}:\end{aligned}$$

取 $_1 = \frac{''\sqrt{\ _0}}{2}$，则当$|x_1-x_2| \le \ _1$ ，

$$\left|\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\right| < '':$$

综上，取 $= \min\{\ _0; \ _1\}$, 当$|x_1-x_2| \le$ ，不等 (1) 立。

我原 的 法 奔着证明$\sqrt{1-x^2}$在$[0; 1]$上 Lipschitz 的 ´ 子去的，但 ˜ 个 Œ 导的Lipschitz 的导 ˜ 定有 ，而$\sqrt{1-x^2}$的导 在1的附 无 。Ï d 我的 g ´ 不 Œ 对头。而李老 的证明的巧妙之 ？在于将区间$[1- \ _0; 1]$ 刨掉，然后在区间$[0; 1- \ _0]$上 • Ä 问题。 然在 d 区间上$\sqrt{1-x^2}$ ÷ 足Lipschitz条件。李老 的证明 Œ 刀阔斧，简 ü o 放。对于刚入学的 学者来 ` ，简 ü ´ 懂。当 我 得 ¦ 的证明 •

，但仍然不@么-人÷¿，然而我•　不　更　的办法。　日我又重新　　　$\sqrt{1-x^2}$，终于找到˜个简　的证明。证明如　：

证明不等

$$\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2} \le \sqrt{2(x_2-x_1)}; \quad 0 \le x_1 \le x_2 \le 1; \tag{2}$$

即　$\sqrt{1-x^2}$　$\frac{1}{2}$　H•lder连续的，然后取　$= \frac{''^2}{2}$, 则不等　(1)　立。

不等　(2)　如　发　的Q？将　$\sqrt{1-x^2}$的x换　$1-x$，则得到　$\sqrt{1-(1-x)^2}$。在0点附　，这个　不多　$\sqrt{2x}$, 而$\sqrt{x}$　$\frac{1}{2}$　H•lder连续的，即

$$\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1} \le \sqrt{x_2-x_1}; \quad 0 < x_1 \le x_2: \tag{3}$$

于　猜测$\sqrt{1-x^2}$在[0; 1]上$\frac{1}{2}$　H•lder连续，即不等　(2). 至于不等　(2)，只需将第二　£　到右端，两边平方，即Œ证明。这个证明　漂　，但‡给　学者讲清　证明g　，却不　@么容´。还　李老　的证明更直　，更容´被人　　。

这学期我在北Œ给˜c级本‰　　高等