许宝騄先生的生平和学术成就

陈家鼎，郑忠国

许宝騄先生祖藉浙江杭州，1910 年 9 月 1 日生于北京。父许引之，自清末至民国北洋政府期间曾任两浙盐运使和我国驻高丽国仁川领事。母程时嘉，江西新建人。许先生排行第七，有两兄四姐，两岁时随家移住天津，八岁时全家去杭州。十四岁时父亲病逝，母亲带全家迁回天津，第二年移居北京。许先生从小受到良好的文化教育，其父先后聘请有国学功底的老师和通晓外文熟悉西方文化的老师在家教授。许先生在十四岁之前尽读四书五经和古文，曾用文言文写作短篇小说《花生姻缘》，并用功于书法，临摹碑帖，学写小楷。十一岁开始学英文、算术，两年后能读英文古典名著［1］。可以说，许先生在入中学 (高中) 之前已在中国传统文化和西方近代启蒙文化两方面都有坚实的功底。

许先生 1925 年进北京汇文中学读书，1928 年中学毕业后进入燕京大学化学系学习，一年后转入清华大学数学系，专攻数学，仍从一年级开始。老师有熊庆来、孙光远、杨武之等人。在清华大学学习期间，曾用秀丽的小楷手书其姐夫俞平伯的著作《古槐书屋词》(有刻本行世，参看本书扉页)，还与俞平伯、二哥许宝騤一起翻译美国作家爱伦坡 (E. A. Poe) 著的小说《长方箱》。译文发表在 1931 年的《新月》月刊上，笔名 \吾庐"。许先生兴趣广泛，钟情昆曲，后参加俞平伯教授主持的 \谷音社" 学唱昆曲。

1933 年，许先生毕业于清华后即参加赴英国庚款公费留学的考试，已被录取但体格检查以体重不足而遭排出。1934 年到北京大学任教，当江泽涵教授的助教，后当美国著名数学家奥斯古德 (Osgood, 1864-1943) 在北大讲学 (讲 \实变函数论"、\复变函数论" 等) 时的助手。在此期间，许先生与江泽涵教授合作，在 \临界点" 方面写出论文 \A note on the indices and numbers of nondegenerate critical points of biharmonic functions", 1935 年发表在《北京大学自然科学季刊》，初步显露了许先生的数学才能。

1936 年许先生再次参加庚款公费留学考试，又考中了并体检合格。是年赴英留学，在伦敦大学学院 (University College London) 专攻数理统计，师从著名的统计学大师 J. Neyman (1894-1981)。四年间，许先生以他娴熟的数学技巧与英国先进的统计思想相结合，迅速写出一系列重要论文，例如他给出了 Fisher-Behrens 问题的解法 [15]，提出了线性模型方差的最优二次估计 [16]，求出了某些重要的行列式的根的概率分布 [21]，发现并证明了 F 检验的第一个优良性质 [19]，等等。(见后面的具体论述。)

许先生于 1938 年获得哲学博士学位 (Ph.D)，1940 年又获科学博士学位 (D.Sci)。

1940 年底，许先生在抗日战争的烽火中回到祖国，受聘为北京大学教授，在昆明西南联大学任教。担任过 \初等微积分"、\高等微积分"、\微分几何"、\高等代数" 等课的教学工作，还开了一门很长的课程，从测度和积分开始，讲到概率论，再通向数理统计。当时的学生钟开莱 (Kai-Lai Chung，后来是国际著名的概率论学者) 回忆说 \他是一个风度优雅而又富有激情的老师，随身带着预先写在本子上的完整的备课笔记。他喜欢在课堂上点出微妙之处。例如，在推导特征函数的反演公式时，他强调 Lebesgue-Stieltjes 积分是能在单个点上积分的 [6]"。此外，还组织数理统计讨论班。在生活十分艰苦的环境下从事教学和科学研究工作，不断有重要的研究成果 (例如 [22])。在 1942 年，许先生由于 \数理统计论文" 荣获第一届 (1941 年度)\国家学术奖励金"。\国家学术奖励金" 是由当时的最高学术审议机关——教育部学术审议委员会设立的。当年获此殊荣的数学家共两人，另一人是著名数学家华罗庚。当年设在昆明西南联合大学的 \新中国数学会" 举行茶会，庆祝华、许两位数学家获此殊荣。

1945 年应 J. Neyman 和另一位著名统计学家 H. Hotelling (1895-1973，多元统计的奠基人之一) 邀请，许先生赴美讲学。先后在加里福利亚大学 (University of California, Berkeley)，哥伦比亚大学 (Columbia University) 和北卡罗莱纳大学 (University of North Carolina, Chapel Hill) 讲课并指导学生进行科学研究。许先生的典型中国学者的风度，对学术工作严格高标准要求以及解决困难而具体的数学问题的热情和努力，给美国同行们留下了深刻的印象 [3]。Neyman 多次讲许宝騄是他最好的学生。\照 Neyman 的看法，许宝騄的水平绝对可以与瓦尔特 (A. Wald) 相媲美，他们是新一代数理统计学家中的两个佼佼者"(见 [14]，中译本第 283 页)。美国国家科学院院士、著名统计学专家 E. L. Lehmann (1917-2009) 当年的博士论文题目就是许先生给他出的。六十年后，Lehmann 在他公开出版的回忆录里，对许先生表示感激，并称许先生是他的 \三个教父之一"[8]。1947 年初，在 H. Hotelling 的要求下，许先生和他一起离开哥伦比亚大学，去北卡罗莱纳大学创办美国第一个统计系。许先生在该系讲授多元统计分析时，为了推导某些统计量的分布 (特别是某些行列式方程的根的概率分布)，引进了许多矩阵技巧用于计算矩阵变换的雅可比行列式。这些重要内容由 W. L. Deemer 和 I. Olkin 二人根据当时学生的听课笔记加以整理后在著名杂志 \Biometrika" 上发表 [7]。在此期间，许先生和 H. Robbins 合作提出了概率论中 \完全收敛" 的概念和定理，论文于 1947 年发表 [23]。Robbins (1915-2002) 后来是美国科学院院士，著名统计学家，在评价许先生时说 \他是不可被忘记的，同时又是无人能替代的"[3]。Robbins 一直保存着许先生 1948 年亲笔写给他的信。Robbins 逝世后，这封信由斯坦福大学的黎子良 (T. L. Lai) 教授转交到北京大学。

1947 年秋许先生谢绝了 J. Neyman 的挽留 (Neyman 希望他回到加州大学伯克利分校任教。关于几个大学争聘他的情况，见 [14])，毅然回到了祖国，继续在北京大学任教。是年，许先生讲授 \矩阵论"，由江泽培先生当助教，批改学生作业本，听讲的有谢邦杰和物理系江丕桓和于敏等人。

1948 年，许先生当选为中央研究院首批院士。当时当选院士的数学家共有五人，另外四人是：姜立夫、陈省身、华罗庚、苏步青。

许先生自幼体弱，多年患胃溃疡，1948 年又发现有肺结核病，只得住医院治疗。虽然在病中，仍指导青年人学习，如要江泽培读大数学家柯尔莫果洛夫 (A. N. Kolmogorov, 1903-1987) 的重要著作《概率论基本概念》(1933 年德文本)。

1949 年新中国诞生，许先生很高兴。他对中国革命的趋势早有认识，在赴美讲学的前夕加入了 \中国民主革命同盟" 这一中国共产党领导下的秘密组织 [1]。北京刚解放，许先生托江泽培给国外的友人发电报：\Am happy after liberation"。

1950 年许先生身体刚好一些就讲 \实变函数论" 课，听课的有赵仲哲、张里千、汪掬方、张芷芬、王光寅等人。他又组织大家学习 E. C. Titchmarch 著的 Introduction to the Theory of Fourier Integrals，参加人有王寿仁、冷生明、江泽培、赵仲哲等人。他高度评价苏联在概率论上的成就，很注意苏联的图书资料。他已学会俄文并积极帮助北大数学系的老师们学习专业俄文，选用辛钦 (Khintchine, 1894-1959, 著名数学家) 的 \数学分析八讲"(俄文) 作读本，教得认真，效果很好。他鼓励丁寿田翻译柯尔莫果洛夫的《概率论基本概念》和格涅坚科 (Gnedenko) 的《概率论教程》，后一本书的中译本出版后对我国高校的概率论教学有广泛影响。他还亲自校订苏联教材的中译本，如辛钦的《数学分析简明教程》(上、下册，北京大学数学分析与函数论教研室译) 及史捷班诺夫 (Stepanov) 的《微分方程教程》(上册，卜元震译)。

解放后，许先生的第一个研究生是赵仲哲 (1924-1987)，赵于 1951 年在北大毕业，毕业论文是 \关于稳定性分布律的显明公式"，部分内容发表于 \数学学报"(1953 年第 3 卷第 3 期)，这是我国解放后较早出现的概率论论文。

1952 年全国高校进行了院系调整，1953 年许先生在新北大组织了学术讨论班，由他报告格涅坚科和柯尔莫果洛夫合著的 \相互独立随机变量之和的极限分布"(俄文)，后来又组织学习 \次序统计量"，参加人有王寿仁、江泽培、赵仲哲、张里千、成平等。讨论班上消化整理该书的主要内容并介绍他自己在极限理论方面取得的科研成果。许先生对相互独立随机变量早有深刻研究，在 1947 年独立于格涅坚科 (但比格氏稍后) 对于行内独立的随机变量阵列，在加项一致可忽略的条件下，给出了行和弱收敛于给定的无穷可分分布的充分必要条件。这一时期，许先生在特征函数和矩阵方面有多篇论文发表。他还建议北京大学数学系派江泽培赴苏联莫斯科大学长期进修。江先生在莫斯科大学三年，对随机场和多维平稳过程的预测理论获得了许多重要成果，回国后培养了一些年轻人。

1955 年许先生当选为中国科学院首批学部委员 (后改称院士)。同时当选的数学家共九人。

1956 年，在周恩来总理主持制定的 \全国科学发展十二年远景规划" 中把概率论与数理统计列为数学的三个重点发展方向之一。为了落实这一规划，大力发展我国的概率论与数理统计，北京大学成立了全国第一个概率统计教研室，许先生担任教研室主任。作为全国公认的学科带头人，许先生素怀报国之志，全局在胸，积极推动科学规划的落实。当时的主要措施有下列几项 (参看 [10]):

1、集中扰势，为全国培养人才。

许先生本人有很高学术水平，但全国当时懂概率统计的人还很少，高校大都未开设概率统计的课程。为了迅速培养人才，只有集中优势全国协作。为此，1956 年秋在

上级的支持下，把中国科学院数学研究所的王寿仁先生、张里千先生，中山大学的郑曾同先生、梁之舜先生借调到北京大学任教 (当时江泽培、胡国定、王梓坤诸先生正在苏联留学)。同时从北京大学数学力学系抽出 34 名学生，从中山大学和南开大学各抽调 10 名四年级学生集中在北大学习。此外北京大学还接受全国一些高等院校的进修教师多人来学习概率统计。这样一支具有七十多人、老中青齐全的学术梯队组织起来了。许先生亲自主持 \独立随机变量族的极限理论" 的讨论班。此讨论班的相当一部分内容后来成为概率论专门化学生 (相当于现在的硕士生) 的教学内容。在这个培训班上，来自北大、中大、南开三所大学的 50 多名学生和部分院校的多名进修教师系统地学习了 \测度论"、\初等概率论"、\概率极限理论"、\马尔可夫链"、\数理统计" 等课程。这是我国培养的数量可观的第一批概率统计人才。这批学员后来成为我国概率统计的骨干力量，例如胡迪鹤、赵达纲、徐光辉、韩继业、谢衷洁等人，进修教师中有王学仁 (后来是云南大学校长)，葛广平 (后来是河北师范大学数学系主任和上海大学基础部主任) 等。

2、延聘外国知名学者来华讲学。

由于 \文革" 前我国与西方无学术交流，许先生和中科院王寿仁先生一起积极约请苏联和东欧的学者来京讲学。在 1957 年和 1958 年间先后有多名专家来华。波兰的 Fisz 教授来北大讲了多元统计和抽样专题，波兰的 Urbanik 教授讲了广义随机过程，苏联的 Dynkin 教授讲了马尔可夫过程的几个前沿专题。这些讲演使听众扩大了眼界，对概率统计有更多了解。可惜的是，由于当时的 \反右斗争" 和 \大跃进" 运动，听众没有时间深入学习和钻研，未能取得预期的效果。在当时的计划里，还打算请苏联概率论专家 Prokhorov 于 1960 年来北大讲随机过程的极限定理。为了作好准备，许先生还让青年教师读了该专家于 1956 年发表的大文章。后因中苏关系急剧恶化，这个讲学计划未能实现。

3、开设现代课程，组织教材建设。

许先生逐步确定了概率统计专业 (当时称“专门化”) 的基本课程：测度论，概率极限理论 (又称分析概率论)，随机过程，数理统计。根据本专业的不同研究方向，学生可在下列课程中选择一两门：马尔可夫过程，平稳过程，博弈论、抽样论，试验设计等。(\文革" 前，北大的本科学制先后有四年、五年、六年。) 许先生亲自主持制定的概率统计专门化的培养计划和教学大纲，充分体现了重视基本知识、强调基本训练、着重基本能力培养的精神，至今对我们仍有指导意义。

1956 年以前北大数学力学系仅开设一门概率论课，教材是格涅坚科所著的 \概率论教程"。此书内容丰富，但作为教材不太合适。许先生认为教材可以有多种，鼓励教员自编教材。赵仲哲先生就是在许先生的鼓励下自编 \概率论讲义"，用油印本发给学生。许先生还建议翻译 W. Feller 所著的 \概率论及其应用"，胡迪鹤同志努力完成了这一任务。

1960 年，许先生系统讲授 \抽样论"，自编讲义，用油印本发给学生。这本讲义后经孙山泽同志整理，由北京大学出版社于 1982 年正式出版 [33]，曾获国家教委优秀教材奖。

4、组织学术讨论班，带领青年教师和学生开展科学研究。

许先生身体一直不好，不能外出，但带病坚持工作，在卧室的外间 (全家共两间房) 挂一黑板，举行学术讨论班。讨论班内容丰富，主题多样，先后有：概率极限理论，试验设计，次序统计量，马尔可夫过程，平稳过程，组合数学等。许先生以他丰富的学识、严谨的学风及深邃的洞察力带领年青人到各个研究领域的前沿，在讨论班上做出研究成果。例如，以 \班成" 笔名发表的论文 \部分平衡不完全区组设计"(由张尧庭执笔)[31] 及 \变叙的项的极限分布"(由孙山泽执笔)[32]。

1959

发表在郑州大学学报上)。孙毕业后分配到郑州大学任教，虽不再从事概率论研究 (他后来是一位优秀的微分几何专家), 但他对许先生这段时间给予的教诲有很深的印象 [13]。

1962 年入学的研究生是吴健，他在许先生的指导下从事非参数统计的学习和研究，写出了优秀论文。毕业后分配到第四机械工业部工作。

许先生一向以学术上的最高标准要求自己，他对于论文的写作和发表，十分注意质量。他曾对他的学生、统计学家张尧庭说 [9]：\一篇文章的价值不是在它发表时得到了承认，而是在后来不断被别人引用的时候才得到了证实。" \我不希望自己的文章登在有名的杂志上因而出了名；我希望一本杂志因为刊登了我的文章而出了名。"

他是这样说，更是这样做的。他把他关于特征函数的重要文章 [25] 放在刚创刊的《数学学报》上发表。把关于矩阵的两篇重要文章 [28][29] 放在刚创刊的《北京大学学报》(自然科学版) 上发表 ([28] 是第一卷第 1 期第 1 篇文章，[29] 是第 3 卷第 2 期文章)。《北京大学学报》创刊后受到广泛关注。

许先生是一位具有献身精神的科学家。解放以后他绝大部分时间是在身体状况十分恶劣又缺乏精心照顾 (许先生终生未婚) 的情况下工作的。他曾开玩笑说：\我也通过了劳卫制"(“劳卫制”为当时的体育锻炼标准，是 \痨"\胃"\痔" 的谐音，意指他患有肺结核、胃溃疡和痔疮等多种疾病)，但是只要工作起来，他就表现出超出常人的精力。

在史无前例的 \文革" 中，一直有病的许先生也难逃劫难。他不仅受到大字报的无端攻击，还曾被勒令从家里走到办公地区。这对一位生病多年不能出行的病人是严重的摧残。

1970 年 12 月 18 日，北京大学一级教授、中科院院士、第四届全国政协委员许宝騄先生病逝于北京大学他的住所，年仅六十岁。人们在他床前发现的是一叠刚刚演算过的草稿。

道德文章垂范人间。一代宗师许宝騄先生以他杰出的才能与忘我的献身精神，留下了举世公认的学术成就，留下了创建我国概率统计学科的业绩，更留下了随着时间推移而越来越显珍贵的精神财富 [12]。

许先生的学术工作主要在数理统计学和概率论领域。此外，他在矩阵论和积分变换方面也有精深的研究工作。他是我国从事概率统计研究的现代学者中达到世界先进水平并有广泛国际影响的第一人。1979 年，为了纪念他诞生 70 周年，著名的《统计学年鉴》(The Annals of Statistics) 曾约请三位著名学者在该刊上联名撰文介绍他的生平 [3]，并分述他在学术上的重要贡献，其中美国国家科学院院士、著名统计学家 E. L. Lehmann 介绍许先生在统计推断方面的工作 [4]，美国国家科学院院士、著名统计学家 T. W. Anderson 介绍许先生在多元统计方面的工作 [5]，著名概率论专家 K. L. Chung (钟开莱) 介绍许先生在概率论方面的工作 [6]。

1981 年，我国科学出版社出版《许宝騄文集》[34]，中国科学院院士江泽涵和段学复为文集写了序言，高度评价了许先生的一生。1983 年，Springer-Verlag 出版了英文

的《许宝騄论文集》[35](Pao-Lu Hsu Collected Papers)。该论文集由 K. L. Chung 负责编辑，包括了许先生的绝大部分论文，解放后发表的中文论文均翻译成英文。在 1997 年，美国出版了《从十七世纪以来的统计科学的领头人物》(Leading Personalities in Statistical Sciences from the Seventeenth Century to the Present) 一书 (N. J. Johnson 和 S. Koty 编辑)，该书登录了包括牛顿、高斯、拉普拉斯、费雪尔、奈曼等著名科学家在内的 114 位重要人物的简短传记，其中唯一入选的中国学者就是许宝騄先生。

许宝騄先生在学术上的主要成就在下列十个方面：

(1) 许宝騄关于数理统计学的第一篇论文 [15] 发表于 1938 年，讨论所谓 Behrens-Fisher 问题。设 $X_1; X_2; :::; X_n$ 和 $Y_1; Y_2; :::; Y_m$ 是分别来自正态总体 $N(¹_1; ¾_1^2)$ 和 $N(¹_2, ¾_2^2)$ 的样本。如果 $¾_1$ 和 $¾_2$ 未知，要检验假设 $H_0 : ¹_1 = ¹_2$，这便是 Behrens-Fisher 问题。许宝騄考虑下列统计量

$$U = (\bar{X} - \bar{Y})^2 = (A_1 S_1^2 + A_2 S_2^2);$$

其中

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i; \quad \bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i;$$

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2; \quad S_2^2 = \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2;$$

A_1 和 A_2 是两个正常数。当 $A_1 = A_2 = (m + n)=[(n + m - 2)nm]$ 时 U 就为学生氏 t 统计量 u_1；当 $A_1 = 1=(n(n-1)); A_2 = 1=(m(m-1))$ 时，U 就是 Behrens-Fisher 统计量 u_2。许宝騄找到了统计量 U 的密度函数的级数展开式，并用它研究否定域 $\{U > C\}$ 的功效函数。具体表明，这个功效函数只是参数 $µ = ¾_1^2=¾_2^2$ 和 $¸ = (¹_1 - ¹_2)^2 = (\frac{1}{n}¾_1^2 + \frac{1}{m}¾_2^2)$ 的函数。此项工作是精确分析的结果，被著名统计学家 H. Sche®e (1970) 称为 \数学严格的典范"。许宝騄利用数学计算和分析工具得到了他主要结论。结论认为，当 $¸ = 0$ 而 $µ$ 变化时 u_1 和 u_2 均不能控制否定 H_0 的概率 ($n = m$ 的情形除外)，但 u_2 对 $µ$ 变化的敏感度较弱。根据许的结果所给出的检验方法被称为 \许方法"。直到现在 \许方法" 仍被认为是解决这一问题的最实用方法。

(2) 许宝騄早期的另一工作 [16] 是关于线性模型方差的二次估计。设

$$y = A¯ + "$$

是一个线性模型，其中 $y = (y_1; :::; y_n)^T$(T 表示转置，下同！)，$¯ = (¯_1; :::; ¯_p)^T$，A 是已知的 $n \times p$ 矩阵 (秩为 p)，$" = ("_1; :::; "_n)^T$ 是各分量相互独立的随机向量且满足条件：

$$E"_i = 0; \quad E"_i^2 = ¾^2; \quad E"_i^4 = ®_i¾^4 \qquad (i = 1; :::; n);$$

其中 ¾ 是未知的正数，$®_i$ 是与 ¾ 无关的常数。设 $Q = Q(y_1; y_2; :::; y_n)$ 是 $y_1; y_2; :::; y_n$ 的二次型。若它满足：(i) 对任何参数 ¯ 和 ¾, $EQ = ¾^2$; (ii) Q 的方差不依赖于 ¯，(iii) 对任何满足条件 (i) 和 (ii) 的二次型 Q_1，Q 的方差均不超过 Q_1 的方差, 则称 Q 是 $¾^2$ 的最优二次无偏估计。

设 $Q = y^T$¤y，其中 ¤ 是 n 阶对称矩阵。许宝騄证明了，Q 是 ¾^2 的最优二次无偏估计的充要条件是 ¤ 有下列形式：

$$¤ = MD_\tau M;$$

其中 $M = I - A(A^TA)^{-1}A^T$，I 是单位阵，$D_\tau = \begin{pmatrix} ¿_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & ¿_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & ¿_n \end{pmatrix}$; 而 $¿_1; ¿_2; :::; ¿_n$ 是二次函数

$$F = \sum_{i,j} ¹_{ij}¿_i¿_j$$

在条件 $\sum_{i=1}^n m_{ii}¿_i = 1$ 下的最小值点，这里

$$¹_{ij} = \sum_{k=1}^n (®_k - 3)m_{ki}^2 m_{kj}^2 + 2m_{ij}^2$$

$(i = 1; :::; n; j = 1; ::; n)$; m_{ij} 是矩阵 $M = (m_{ij})_{n\times n}$ 的元素，$®_i = ¾^{-4}E"_i^4 \quad (i = 1; :::; n)$。

许还证明了，¾^2 的通常估计

$$S_0^2 = \frac{1}{n-p} \parallel y - A\hat{^} \parallel^2$$

($\hat{^}$ 是 $^-$ 的最小二乘估计，$\parallel z \parallel$ 是 z 的模) 是最优二次估计的充要条件是下列等式成立：

$$(n-p)\sum_{i=1}^n (®_i - 3)m_{ii}m_{ik}^2 = m_{kk}\sum_{i=1}^n (®_i - 3)m_{ii}^2:$$

许的上述结果是后来关于方差和方差分量的最优二次估计的大量研究的开山之作。

(3) 许宝騄对小样本推断的研究工作主要是围绕单变量和多变量的线性假设检验问题，特别是关于这些检验的功效函数的研究。他在 [17] 中给出了 Hotelling T^2 检验的功效函数，指出在非零假设下 T^2 的分布是一个非中心 $\hat{A}^2$ 变量和一个与之相互独立的中心 $\hat{A}^2$ 变量的比值的分布。同时指出，T^2 检验具有局部最大功效。许对多元线性假设，在协方差阵已知时给出了似然比统计量的分布；对于协方差阵未知的情形，记 μ_i 为相关行列式方程的根，许考虑检验统计量 $W = \prod(1-\mu_i)$ 和 $V = \sum \mu_i$=$(1-\mu_i)$，并证明了当样本量趋于无穷时，两者的渐近功效是相同的 [18]。

许在小样本的推断中最出色的工作之一是对一元线性假设似然比检验优良性的论证 [19]。不失一般性，我们在线性模型典则形式下简述他的结论。

设随机变量 $Y_1; Y_2; :::; Y_m; Z_1; :::; Z_n$ 的联合密度是

$$p(y_1; :::; y_m; z_1; :::; z_n) = (\sqrt{2¼¾})^{-(m+n)} exp\{-\frac{1}{2¾^2}[\sum_{i=1}^m (y_i - ´_i)^2 + \sum_{i=1}^n z_i^2]\};$$

其中 $´_1; :::; ´_m$ 是任意 m 个实数，¾ 是任意正数 (均未知)。要检验的假设是

$$H_0 : ´_1 = ´_2 = ::: = ´_{n_1} = 0;$$

其中 n_1 是不超过 m 的正整数。令

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} y_i^2}{\sum_{i=1}^{n_1} y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} z_i^2};$$

$$W_0 = \{(y_1; :::; y_{n_1}; z_1; :::; z_n) : F \geq F_\alpha\};$$

其中 F_α 由等式 $P(F \geq F_\alpha | H_0) =$ ® 确定，这里 $F = \sum_{i=1}^{n_1} Y_i^2 = (\sum_{i=1}^{n_1} Y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} Z_i^2)$。

用 W_0 作为 H_0 的否定域时，可以证明功效函数只是参数 ¸ 的函数 $¯_0(¸)$，这里

$$¸ = \frac{1}{2¾^2} \sum_{i=1}^{n_1} ´_i^2:$$

许宝騄发现并证明了下列结论：设 W 是由一些点 $(y_1; :::; y_m; z_1; :::; z_n)$ 组成的任何否定域，满足条件：W 的检验水平是 ® 且 W 的功效函数是关于参数 ¸ 的函数 $¯(¸)$，则对一切 $¸ > 0$，$¯(¸) \leq ¯_0(¸)$。

换句话说，针对假设 H_0 的否定域 W_0 乃是一切检验水平是 ® 的且功效函数仅依赖于参数 ¸ 的否定域中功效最大的。这个结论乃是关于 F 检验的优良性的第一个定理，被称为许宝騄定理 (参看 H. B. Mann 的书，Analysis and Design of Experiments, 1949)。这一工作后来在国际上于两个方面继续发展，一是把许的提法应用到多元分析问题上去，Simaika (1941) 发展了 Hotelling T^2 和多重相关系数理论；另一方面，许的这篇文章提供了得到一切相似检验的新方法，以至后来由 Lehmann 和 Sche®e 形成完全性的概念 [4]。

(4) 从 1938 年到 1945 年，许宝騄发表了多篇处于多元统计分析理论发展前沿的论文。主要是推导了若干重要而复杂的统计量的精确分布或渐近分布。

多元理论的一个关键要素是样本协方差阵 S 的分布。设 $X_1; X_2; :::; X_N$ 是来自 $N(0; §)$ 的随机样本，则

$$A \triangleq (N-1)S = \sum_{\alpha=1}^{N} (X_\alpha - \bar{X})(X_\alpha - \bar{X})^T \tag{1}$$

服从所谓的 Wishart 分布 $W(§; N-1)$。

许宝騄在 [20] 中把分析方法和代数方法结合起来，用数学归纳法来推导著名的 Wishart 分布，至今被认为是这个分布的各种推导方法中最优美的一个 [5]。

他在 [21] 中还得到了对多元分析有重要意义的某些行列式方程的根的概率分布。设 A 和 B 独立且分别服从 Wishart 分布 $W(§; m)$ 和 $W(§; n)$，这里 $m \geq p; n \geq p$ (p 是矩阵 $\sum$ 的阶)。设 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq ::: \geq \mu_p$ 是行列式方程

$$|A - \mu(A+B)| = 0$$

的根。许通过复杂的计算证明了 $\theta_1, \ldots, \theta_p$ 的联合密度等于一个常数乘以下式

$$\prod_{i=1}^{p} \theta_i^{\frac{1}{2}(m-p-1)} \prod_{i=1}^{p} (1-\theta_i)^{\frac{1}{2}(n+p-1)} \prod_{i=1}^{p} \prod_{j=i+1}^{p} (\theta_i - \theta_j).$$

设上述公式 (1) 中的 A 和相应的 Σ 有如下分块：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix},$$

其中 A_{11} 和 Σ_{11} 都是 p_1 阶方阵，A_{22} 和 Σ_{22} 都是 p_2 阶方阵。样本的典型相关系数和总体的典型相关系数分别是下列方程的根

$$\begin{vmatrix} -\lambda A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -\lambda A_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -\lambda \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda \Sigma_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

许宝騄找到了正则化样本典型相关系数的渐近分布。(见 [35] 的 142-149 页)

当 A 与 B 相互独立，A 服从非中心 Wishart 分布而 B 服从中心 Wishart 分布时，许研究了行列式方程

$$|A - \phi B| = 0$$

的根的联合分布，在一定条件下给出了它们的渐近分布。(见 [35] 的 129-140 页)

序列相关用于检验具有相同正态分布的随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ 的独立性，采用统计量 $T = Q/S$，其中

$$Q = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(X_i - \bar{X})(X_j - \bar{X}), \quad S = \sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2.$$

设 a_{ij} 依赖于 N，许在一定条件下给出了 N 无限增大时 T 的分布函数的渐近展式。(见 [35] 的 224-228 页)

此外，许研究了样本量无限增大时函数 $f(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k)$ 的极限分布，这里 $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k$ 是独立样本的均值向量。利用均值的中心极限定理和函数 $f(\cdot)$ 的泰勒展开，许得到结论；极限分布为正态分布或正态变量平方的加权和的分布 (若线性项的方差趋于 0)。许利用他的一般结果得到了很多检验统计量特别是多元分析中统计量的渐近分布。

(5) 许宝騄对概率论及其应用的重要贡献主要来自使用特征函数方法的完美技巧，他是一位名副其实的特征函数方面的行家 [6]。文章 [22] 是对 Berry 结果的重大推进。设 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ 是 n 个独立同分布的随机变量，$E\xi_i = 0, E\xi_i^2 = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ (即均值为 0，方差为 1)，令

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad \eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi})^2,$$

并以 $\Phi(x)$ 记标准正态分布函数。一个从理论和应用的角度都引人注目的问题是 $\bar{\xi}$ 和 η 在适当正则化后向标准正态分布变量收敛的速度 (当 n 增大时)。在这方面，Cramér 得到 $F_n(x) \triangleq P(\sqrt{n}\bar{\xi} \leq x)$ 的渐近展式

$$F_n(x) = \Phi(x) + \psi(x) + R(x),$$

其中 $\tilde{A}(x)$ 和 $R(x)$ 是与 $»_1$ 的分布及 n 有关的有特定形式的函数，$lim_{n\to\infty}R(x) = 0$。Berry 则给出了 $F_n(x)$ 与 $©(x)$ 之差的一致估计：

$$|F_n(x) - ©(x)| \leq A¯_3 n^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{对一切 } x);$$

其中 $¯_3 = E|»_1|^3$，A 是绝对常数 (不依赖于 n，也不依赖于 $»_1$ 的分布)。

在 [22] 中，许对 Berry 的方法进行了推广，不仅给上述 Cram¶er 的结果的一个简单证明，而且他用样本方差 $´ = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(»_i - \overset{1}{»})^2$ 取代样本均值 $\overset{1}{»} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}»_i$ 后，对相应的

$$G_n(x) = P(\sqrt{n}(´ - 1)=(\sqrt{®_4} - 1) \leq x)$$

($®_4 = E»_1^4$) 进行了深入研究，在 $®_6 = E»_1^6 < \infty$ 且 $®_4 - 1 - ®_3^2 \neq 0$ ($®_3 = E»_1^3$) 的条件下证明了

$$|G_n(x) - ©(x)| \leq \frac{A}{\sqrt{n}}\left(\frac{®_6}{®_4 - 1 - ®_3^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{对一切 } x);$$

其中 A 是绝对常数。许还在条件 $E»^{2k} < \infty$(对某个 $k > 3$) 下得到 $G_n(x)$ 的渐近展式，其余项有明确的上界。

(6) 许宝騄在概率论方面另一基础性的有深刻影响的工作是在加强独立随机变量列强大数律结论方面所作的努力。设 $\{»_n; n \geq 1\}$ 是独立同分布均值为 ¹ 且方差有限的随机变量列，许和 Robbins 在他们合作的论文 [23] 中首先证明了下列结论：对任何 $" > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}»_k - ¹| \geq ") < \infty: \tag{2}$$

这是比强大数律 ($\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}»_k$ 概率为 1 地收敛于 ¹) 更强的结论。当 (2) 式成立时，[23] 中称 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}»_k$ 完全收敛于 ¹。\完全收敛" 的概念提供了一个加强大数定律结论的方向，引起了广泛的注意，许多中外学者沿着这一方面继续工作。在 [23] 中还提出了猜测：方差有限还是 (2) 成立的必要条件。两年后，著名数学家 P. ErdÄos 证明了这个猜测是正确的。

(7) 二十世纪四十年代前后，一个挑战性问题是寻求行内独立随机变量三角阵列行和的弱极限问题的彻底解决，引起象 Levy, Feller, Kolmogorov 和 Gnedenko 等著名学者的关注。许宝騄参加了这一竞争并且证明了自己是一个强者。文 [24] 原来是他 1947 年给钟开莱教授的一份手稿，1968 年这篇手稿作为 Gnedenko 和 Kolmogorov 合著的《独立随机变量和的极根分布》一书的英译本的附录公开发表。在这篇文章里，许独立于 Gnedenko(但比后者稍后) 也得到了三角阵列的独立和依分布收敛到某一无穷可分布的必要充分条件，而且在方法上很有特色。

(8) 许宝騄十分喜爱特征函数这一概率统计的重要工具，不仅多次用来推导许多随机变量的概率分布，计算检验的功效函数，确定随机序列的极限分布，给出多种估计的界限，而且对特征函数本身证明了一些深刻的定理。

设随机变量 X 的分布函数是 $F(x)$，则特征函数是

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x):$$

许在 [25] 中用 $f(t)$ 在小区间 $(-\pm; +\pm)$(某个 $\pm > 0$) 上的性态给出了 X 的 ¯ 阶绝对矩

$$M_\beta(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\beta dF(x) < \infty$$

的充要条件。在 [26] 中研究了特征函数 $f(t)$ 在 $(-\infty; +\infty)$ 上的值能否由小区间上 $(-\pm; +\pm)$ 的值完全确定的问题。这个问题与著名的矩问题有关联：什么情形下随机变量的概率分布完全由其各阶矩所完全确定。Gnedenko 首先造出了一个例子，表明有两个不同的特征函数，它们的小区间 $(-\pm; +\pm)$ 上处处相等。许宝騄把这种不能由小区间上的值完全决定在 $(-\infty; +\infty)$ 上的值的特征函数 $f(t)$ 称为属于类 (Ů)。许找出了类 (Ů) 的三个子类。第一个子类是最简单的，但已包括了当时已有的各个例子；第二个子类是由一部分稳定分布对应的特征函数组成；第三个子类是由所有这样的分布函数 $F(x)$ 的特征函数组成，$F(x)$ 有密度 $p(x)$ 且

$$p(x) = O[exp(-\frac{|x|}{\tilde{A}(|x|)})] \quad (|x| \to \infty);$$

这里 $\tilde{A}(x)$ 是下列函数之一：

$$(lnx)^\lambda; \quad (lnx)(lnlnx)^\lambda; \quad ::: \quad (¸ > 1)$$

(9) 许宝騄对矩阵这一代数工具运用娴熟，而且证明了一些深刻的定理。在 [27] 中对复数域上的方阵研究变换：

$$A \to B = PA(\bar{P})^{-1};$$

其中 P 是非奇异矩阵，$\bar{P}$ 是由 P 的元素取共轭得到的矩阵。若两个方阵 A 和 B 可以通过这种变换由其中一个变为另一个，则称 A 与 B 相似。[27] 中给出了这种变换下所有矩阵的法式 (标准形) 以及判断二矩阵相似的充要条件。

在 [28] 中研究了矩阵偶的一种变换。设 A_1 和 A_2 是复数域上大小相同的两个矩阵，研究变换：

$$A_1 \to B_1 = PA_1Q; \quad A_2 \to B_2 = PA_2\bar{Q};$$

其中 P 和 Q 都是非奇异的方阵。这个变换乃是将矩阵偶 $(A_1; A_2)$ 变为 $(B_1; B_2)$。两个矩阵偶叫做相互等价的，若这两个偶可经上述变换由一个变为另一个。许找出了在等价关系下所有矩阵偶的法式 (标准形)，并给出了两个偶等价的充要条件。

文 [29] 是许的一篇长文 (中文 38 页，英译文有 54 页)。对厄密特矩阵和对称矩阵 (或斜对称矩阵) 的联合变换进行了深入研究。设 A_1 是厄密特矩阵，A_2 是对称矩阵或斜对称矩阵。对 $(A_1; A_2)$ 施行下列变换：

$$A_1 \to B_1 = PA_1(\bar{P})^T; \quad A_2 \to B_2 = PA_2P^T;$$

其中 P 是非奇异矩阵，T 表示转置。称 $(A_1; A_2)$ 与 $(B_1; B_2)$ 是相合的，若在上述变换下可由一个变为另一个。通过复杂的推理和计算得到了下列结果：

)+

(i) 设 A_1 是任何厄密特矩阵，A_2 是任何对称阵，给出了在相合关系下 $(A_1; A_2)$ 的所有可能的法式 (共有 7 种形式)，并给出了判断两个这种偶相合的充要条件；

(ii) 设是 A_1 任何厄密特矩阵，A_2 是任何斜对称矩阵，给出了在相合关系下 $(A_1; A_2)$ 的所有可能的法式 (共 8 种形式)，并给出了判断两个这种偶相合的充要条件。

这些结论是对矩阵论的重要贡献，在推导过程中表现出许先生处理矩阵的高度技巧与深入细致的严谨学风。

(10) 许在 [30] 中研究了马氏过程转移函数的可微性，状态空间是 n 维欧氏空间而其轨道是纯跳跃的。设 X 是欧氏空间，$\mathcal{F}$ 是 X 中全体 Borel 集组成的集合系。$p(t; x; E)$ 是齐次马尔可夫过程的转移函数，即是过程于时刻 s 处于 x 的条件下在时刻 $t + s$ 所处状态属于集合 E 的概率 $(x \in X; t > 0; E \in \mathcal{F})$。[30] 在很一般的条件下论证了 $p(t; x; E)$ 对 t 的可微性，并给出了 $p(t; x; E)$ 的积分表达式。所得结果是 Austin 等人关于可列状态空间转移概率 $p_{ij}(t)$ 的有关性质的推广。所用的方法尤为初等，所获得的结果倒是更精确一些。 0® > 0

除了上述十个方面外，许宝騄和他领导的讨论班在试验设计和次序统计量等方面都有许多很好的工作，其中部分成果是以 \班成" 的笔名写成论文发表 ([31]、[32])。 达出了判断

在 [31] 中对 m 个结合类的部分平衡不完全区组 (PBIB) 设计进行了系统研究，对一些参数组对应的 PBIB 设计的存在性和具体构造给出了明确的答案；在 [32] 中对次序统计量进行了研究。设 $X_1; :::; X_n$ 是相互独立同分布的随机变量，共同分布函数是 $F(x)$，$»_1^{(n)} \le ::: \le »_n^{(n)}$ 是其次序统计量。在 [32] 中研究了不固定名次边项和非正则中间项 $»_{k_n}^{(n)}$ $(k_n \to \infty; k_n{=}n \to ¸ \in [0; 1))$ 的极限分布问题。在一些附加条件下证明 $»_{k_n}^{(n)}$ 在正则化后的极限分布是下列三种之一：

$$Á_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2¼}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$Á_2(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha ln x + \beta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt & x > 0; ® > 0 \end{cases}$$

$$Á_3(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha ln|x| + \beta} e^{-\frac{t^2}{2}} & \end{cases}$$

[1] 许宝騄，许宝騄事略 (1980)，见本书.

[2] 江泽涵、段学复，《许宝騄文集》前言，《许宝騄文集》(1981)，科学出版社.

[3] Anderson, T. W., Chung, K. L. and Lehmann, E. L., *Pao-Lu Hsu 1909-1970*, Ann. Statist, 1979, 7: 467-470.

[4] Lehmann, E. L., *Hsu's Work on Inference*. Ann. Statist. 1979, 7: 471-472.

[5] Anderson, T. W., *Hsu's Work in Multivariate Analysis*. Ann. Statist, 1979, 7: 474-478.

[6] Chung, K. L., *Hsu's Work in Probability*. Ann. Statist, 1979, 7: 479-483.

[7] Deemer, W.L. and Olkin, I.(1951), *The Jacobians of Certain Matrix Transformations Useful in Multivariate Analysis*, Based on Lectures of P.L.Hsu at the University of North Carolina, 1947. Biometrika 38: 345-367.

[8] Lehmann, E. L., 一个博士的三个教父，译自 Reminiscences of a Statistician: The Company I Kept, 2008 Springer, 见本书.

[9] 张尧庭，深深的怀念，见本书.

[10] 胡迪鹤，纪念先师许宝騄诞辰一百周年，见本书.

[11] 程士宏，许宝騄传.《中国现代数学家传》(第一卷)，江苏教育出版社 (1994).

[12] 北京大学数学科学学院，纪念一代宗师许宝騄教授诞辰 90 周年，数学进展。2000，29：369-374.

[13] 孙振祖，怀念恩师许宝騄先生，见本书.

[14] 瑞德 (C. Reid): 耐曼 { 现代统计学家，姚慕生等译，上海翻译出版公司 (1987).

以下是许宝騄先生的代表性论文和专著：

[15] *Contribution to the theory of "Student's" t-test as applied to the problem of two-samples*. Statist. Res. Mem, 2(1938), 1-24.

[16] *On the best unbiased quadratic estimate of the variance*. Statist. Res. Mem. 2(1938), 91-104.

[17] *Notes on Hotelling's generalized T*. Ann. Math. Statist.9(1938), 231-243.

[18] *On generalized analysis of variance*. Biometrika. 31(1940), 221-237.

[19] *Analysis of variance from the power function standpoint*. Biometrika. 32(1941), 62-69.

[20] *A new proof of the joint product moment distribution*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 35(1939), 336-338.

[21] *On the distribution of roots of certain determinantal equations*. Ann. Eugenics. 9(1939), 250-258.

[22] *The approximate distribution of the mean and variance of a sample of independent variables*. Ann. Math. Statist 16(1945), 1-29.

[23] *Complete convergence and the law of large numbers*. (with H. Robbins) Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 33(1947), 25-31.

[24] *A general weak limit theorem for independent distributions*. (Appendix III in Limit Theorems of Sums of Independent Random Variables by B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, translated by K. L. Chung. revised edition, Addison-Wesley 1968).

[25] **绝对动差与特征函数**. **数学学报，**1(1951)，257-280.

[26] **在零点的邻区内彼此相等的特征函数**. **数学学报，**4(1954)，21-32.

[27] **论矩阵的一种变换**. **数学学报，**5(1955)，333-346.

[28] **论矩阵偶的一种变换**. **北京大学学报 (自然科学版)，**1(1955)，1-16.

[29] **一个厄密方阵及一个对称或斜称方阵的联合变换**. **北京大学学报 (自然科学版)，**3(1957)，167-209.

[30] **欧氏空间上纯间断的时齐马可夫过程的概率转移函数的可微性**. **北京大学学报 (自然科学版)，**4(1958)，257-270.

[31] **部分平衡不完全区组设计 (许先生所主持讨论班的成果，以 \班成" 笔名发表)**. **数学进展，**7(1964)，240-281.

[32] **变叙的项的极限分布 (许先生所主持讨论班的成果，以 \班成" 笔名发表)**. **数学学报，**14(1964)，694-714.

[33] **抽样论，北京大学出版社** (1982)，**北京**.

[34] **许宝騄文集，科学出版社** (1981)，**北京**.

[35] Pao-Lu Hsu Collected Papers, Springer-Verlag(1983). New York.